

# Schéma temporel et impact sur la structure du code CROCO hydro

13 octobre 2016

$$\frac{D \langle \mathbf{u}_h \rangle}{Dt} + f \mathbf{k} \times \langle \mathbf{u}_h \rangle = \frac{\nabla_h p}{\rho_0} - \nabla_h \cdot \langle \mathbf{u}'_h \mathbf{u}'_h \rangle - \partial_z \langle w' \mathbf{u}'_h \rangle$$

$$\partial_z p = -g \rho'$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0$$

$$\frac{D \langle T \rangle}{Dt} = -\frac{\partial_z Q_s}{\rho_0 C_{p,o}} - \nabla_h \cdot \langle \mathbf{u}'_h T' \rangle - \partial_z \langle w' T' \rangle$$

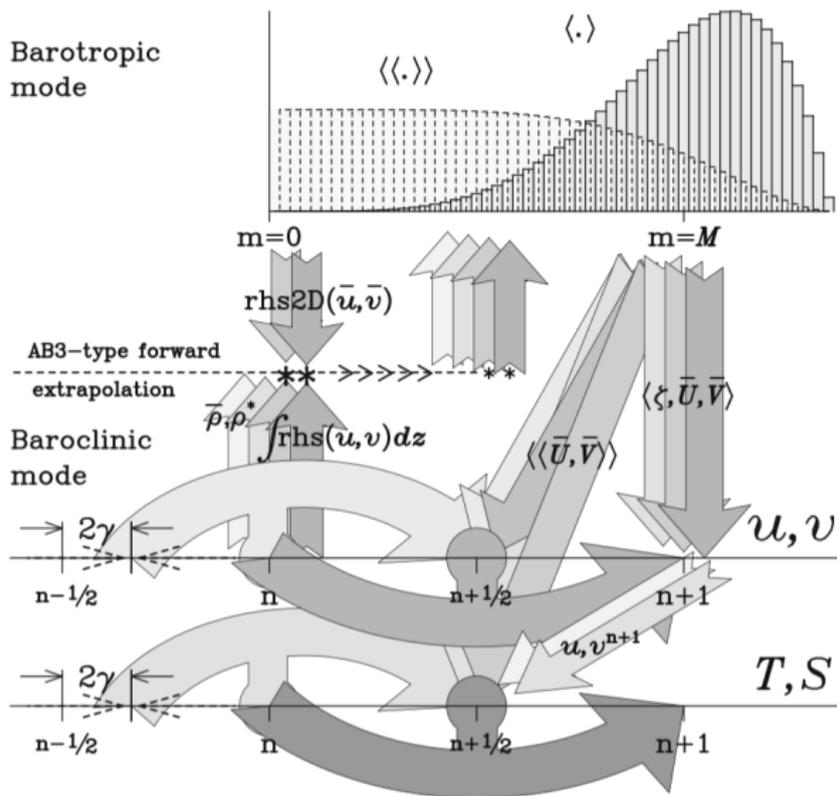
$$\frac{D \langle S \rangle}{Dt} = -\nabla_h \cdot \langle \mathbf{u}'_h S' \rangle - \partial_z \langle w' S' \rangle$$

$$\rho = \rho_{\text{eos}}(\langle T \rangle, \langle S \rangle, z)$$

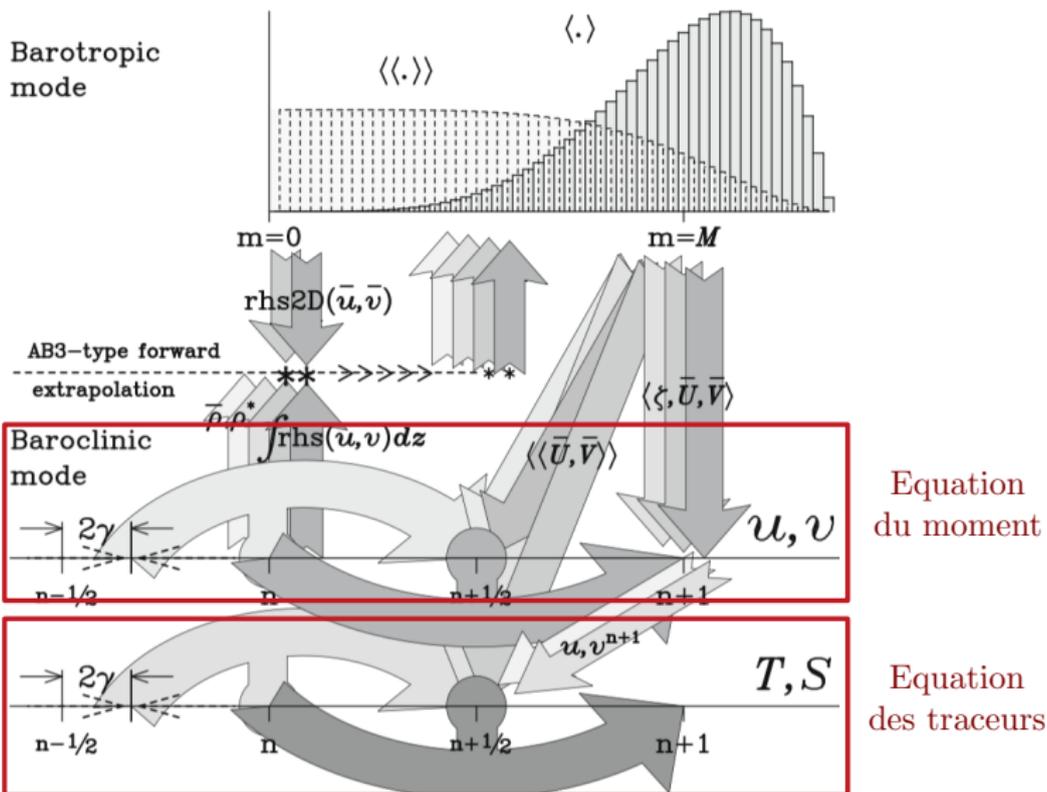
et le mode barotrope (avec  $D = \zeta + H$  et  $D\bar{\mathbf{u}} = \int_{-H}^{\zeta} \mathbf{u}_h dz$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \zeta = -\nabla_h \cdot D\bar{\mathbf{u}} \\ \partial_t(D\bar{u}) = Df\bar{v} - \nabla_h \cdot (D\bar{u}\bar{\mathbf{u}}) - gH\partial_x \zeta - (g/2)\partial_x \zeta^2 + D\mathcal{F}_{3D}^{(u)} \\ \partial_t(D\bar{v}) = -Df\bar{u} - \nabla_h \cdot (D\bar{v}\bar{\mathbf{u}}) - gH\partial_y \zeta - (g/2)\partial_y \zeta^2 + D\mathcal{F}_{3D}^{(v)} \end{array} \right.$$

# Schéma en temps



# Schéma en temps (traçeurs)



## Schéma en temps (moment et traceurs)

Schéma prédicteur-correcteur de type Leapfrog (LF) avec interpolation Adams-Moulton (AM) d'ordre 3  $\Rightarrow$  LF-AM3

Pour une quantité  $q$

$$\begin{cases} q^{n+1,*} &= q^{n-1} + 2\Delta t \text{ RHS} \{q^n\} & \text{(LF)} \\ q^{n+\frac{1}{2}} &= (5/12) q^{n+1,*} + (2/3) q^n - (1/12) q^{n-1} & \text{(AM3)} \\ q^{n+1} &= q^n + \Delta t \text{ RHS} \left\{q^{n+\frac{1}{2}}\right\} & \text{(corrector)} \end{cases}$$

Version compacte utilisée dans le code :

$$\begin{aligned} \text{pre\_step3d.F } q^{n+\frac{1}{2}} &= (1/2 - \gamma) q^{n-1} + (1/2 + \gamma) q^n + (1 - \gamma)\Delta t \text{ RHS} \{q^n\} \\ \text{step3d\_}[t - uv].F } q^{n+1} &= q^n + \Delta t \text{ RHS} \left\{q^{n+\frac{1}{2}}\right\} \end{aligned}$$

avec  $\gamma = 1/6$  (cf pre\_step3d.F).

*(Pour l'intégration des termes diffusifs cf slides paramétrisations)*

→ Certains termes sont calculés 2 fois sur un pas de temps

- Advection 3D
- Equation d'état
- Gradient de pression
- Equation de continuité
- Coriolis

→ Termes calculés une fois sur un pas d'Euler

- Paramétrisation physique du mélange vertical
- Diffusion tournée
- Termes visqueux et de diffusion en général

### Structure de la routine step()

```
call prestep3D_thread()  
call step2d_thread()  
call step3D_uv_thread()  
call step3D_t_thread()
```

## Structure des tableaux des variables d'état

→ Besoin de stocker 3 instants temporels

```
real u(GLOBAL_2D_ARRAY,N,3)
real v(GLOBAL_2D_ARRAY,N,3)
real t(GLOBAL_2D_ARRAY,N,3,NT)
```

→ Indices temporels

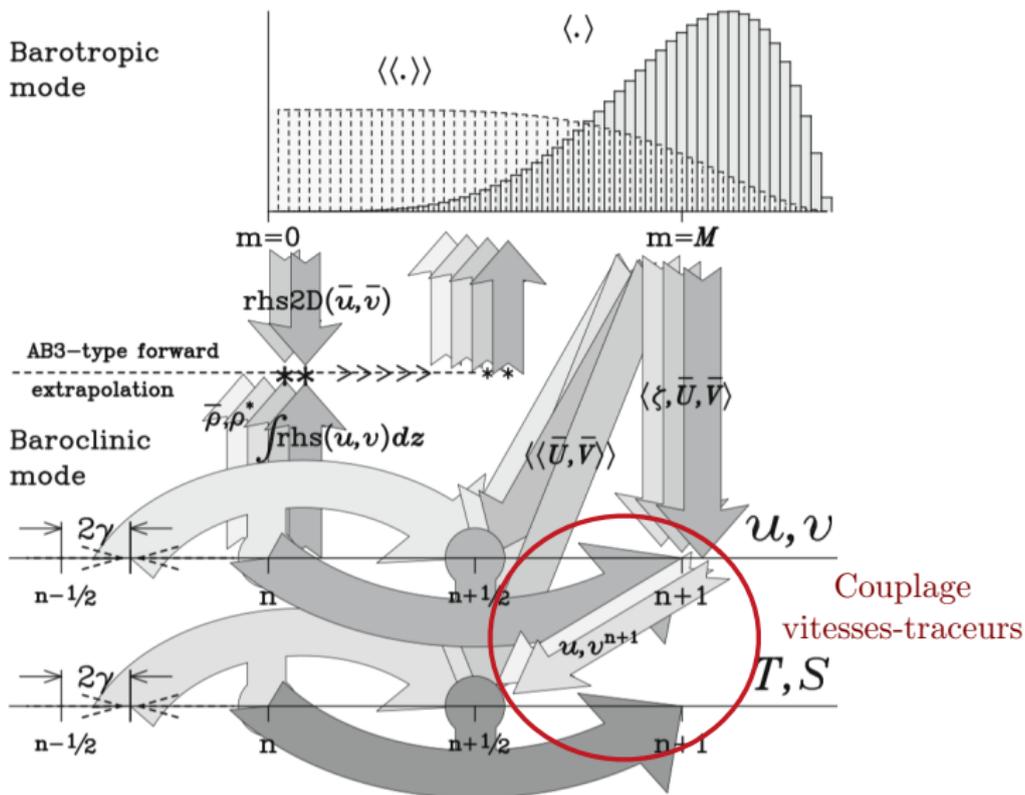
Prédicteur

```
nstp=1+mod(iic-ntstart,2) <- nstp = 1 ou 2
nrhs=nrhs          <- n
nnew=3             <- n+1/2
indx=3-nstp       <- n-1
```

Correcteur

```
nrhs=nrhs          <- n+1/2
nnew=3-nstp       <- n+1
```

# Schéma en temps (couplage vitesses traceurs)



## Schéma en temps (couplage vitesses traceurs)

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z w + \partial_x u = 0 \\ \partial_z p + \rho g = 0 \\ \partial_t u + (1/\rho_0)\partial_x p = 0 \\ \partial_t \rho + \partial_z(w\rho) = 0 \end{array} \right.$$

# Schéma en temps (couplage vitesses traceurs)

Prédicteur

$$\begin{aligned}\partial_x p^n &= g \partial_x \left( \int_z^0 \rho^n dz \right) \rightarrow u^{n+1/2} = (1/2 - \gamma) u^{n-1} + (1/2 + \gamma) u^n + (1 - \gamma) \frac{\Delta t}{\rho_0} (\partial_x p^n) \\ w^n &= - \int_{-H}^z \partial_x u^n dz' \rightarrow \rho^{n+1/2} = (1/2 - \gamma) \rho^{n-1} + (1/2 + \gamma) \rho^n + (1 - \gamma) \Delta t \partial_z (w^n \rho^n)\end{aligned}$$

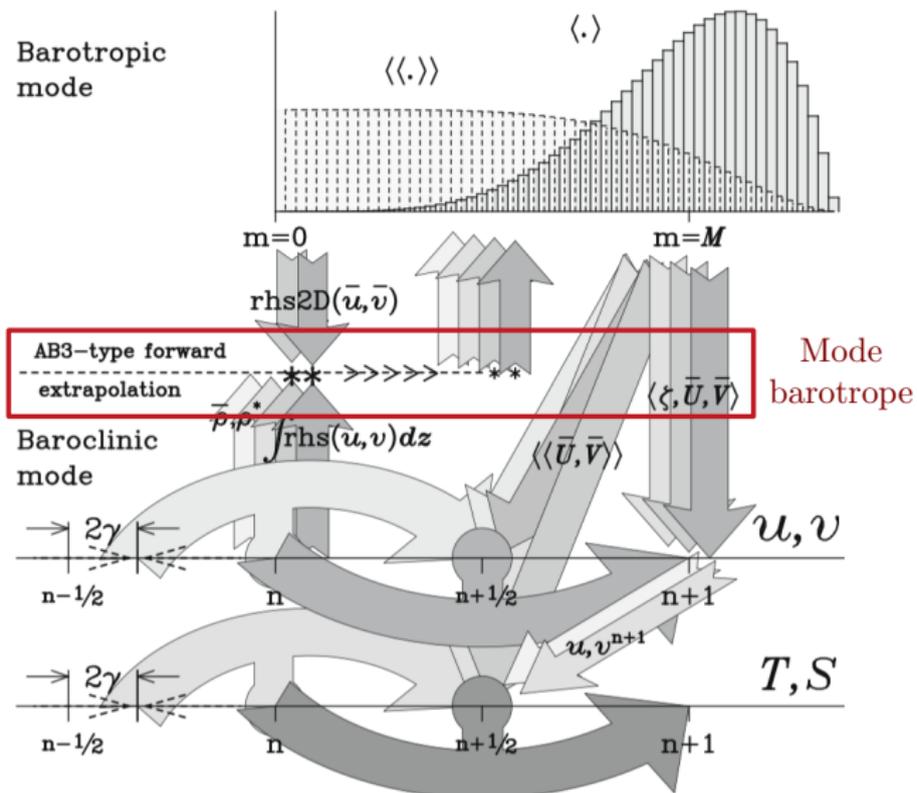
Correcteur

$$\begin{aligned}\partial_x p^{n+1/2} &= g \partial_x \left( \int_z^0 \rho^{n+1/2} dz \right) \rightarrow u^{n+1} = u^n + (\Delta t / \rho_0) (\partial_x p^{n+1/2}) \\ w^{n+1/2} &= - \int_{-H}^z \partial_x \left\{ \frac{3u^{n+1/2}}{4} + \frac{u^n + u^{n+1}}{8} \right\} dz' \rightarrow \rho^{n+1} = \rho^n + \Delta t \partial_z (w^{n+1/2} \rho^{n+1/2})\end{aligned}$$

Conséquences :

- Vitesses 3D intégrées avant les traceurs au niveau du correcteur
- 2 évaluations du gradient de pression par pas de temps
- 3 évaluations de l'équation de continuité

# Schéma en temps (mode barotrope)



## Generalized forward-backward (prédicteur-correcteur)

- Extrapolation de type AB3

$$\begin{aligned} D^{m+1/2} &= H + (3/2 + \beta) \zeta^m - (1/2 + 2\beta) \zeta^{m-1} + \beta \zeta^{m-2} \\ \bar{u}^{m+1/2} &= (3/2 + \beta) \bar{u}^m - (1/2 + 2\beta) \bar{u}^{m-1} + \beta \bar{u}^{m-2} \end{aligned}$$

- Intégration de  $\zeta$

$$\zeta^{m+1} = \zeta^m - \Delta\tau \partial_x (D^{m+1/2} \bar{u}^{m+1/2})$$

- Interpolation de type AM4

$$\zeta^* = (1/2 + \gamma + 2\varepsilon) \zeta^{m+1} + (1/2 - 2\gamma - 3\varepsilon) \zeta^m + \gamma \zeta^{m-1} + \varepsilon \zeta^{m-2}$$

- Intégration de  $\bar{u}$

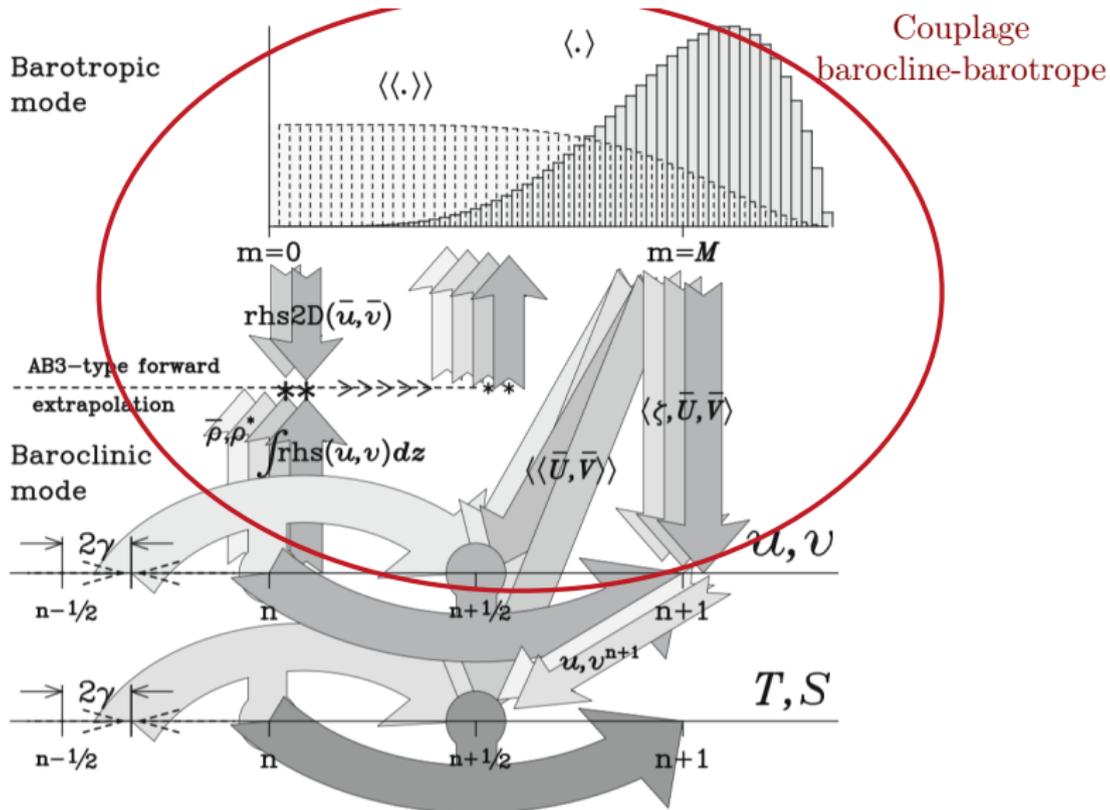
$$\bar{u}^{m+1} = \frac{1}{D^{m+1}} \left[ D^m \bar{u}^m + \Delta\tau \text{RHS2D}(D^{m+1/2}, \bar{u}^{m+1/2}) \right]$$

```
real zeta(GLOBAL_2D_ARRAY,4)
real ubar(GLOBAL_2D_ARRAY,4)
real vbar(GLOBAL_2D_ARRAY,4)
```

→ Indices temporels

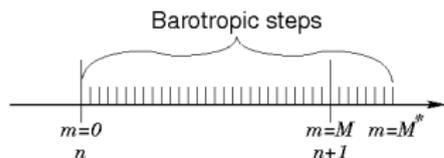
```
kold      <- m-2
kbak      <- m-1
kstp      <- m
knew      <- m+1
```

# Schéma en temps (couplage barocline-barotrope)

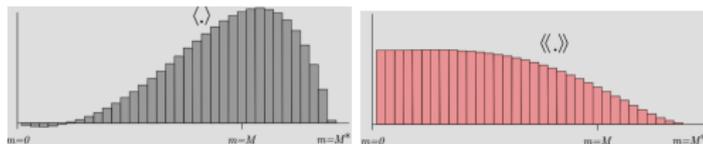


# Schéma en temps (couplage barocline-barotrope)

- Intégration barotrope de  $n$  à  $n + M^* \Delta\tau$  ( $M^* \leq 1.5M$ )



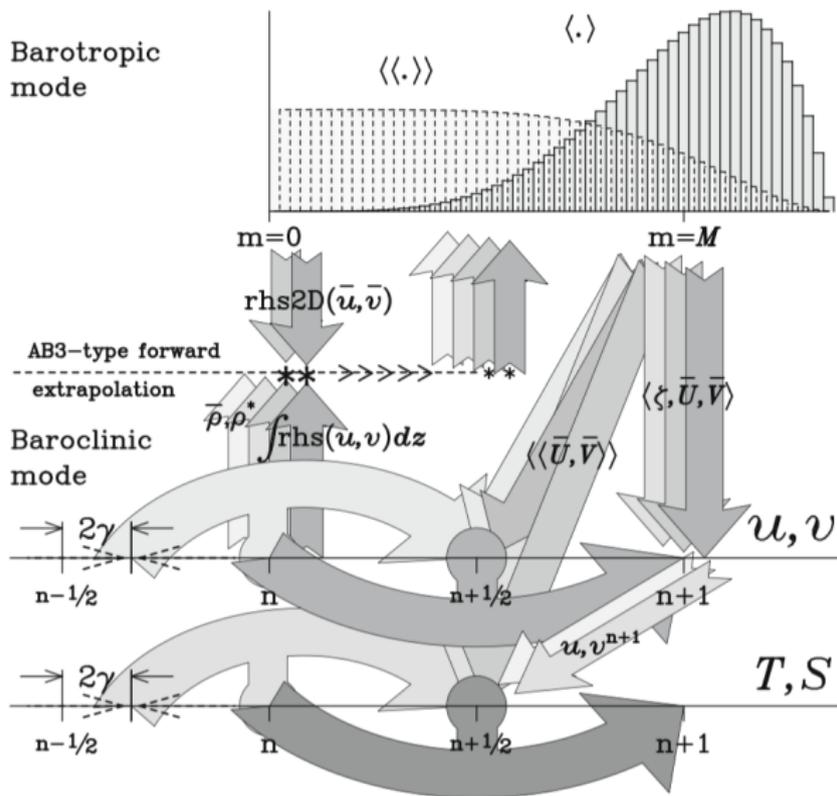
- Intégration de type prédicteur-correcteur  $\Rightarrow$  2 filtres barotropes



- $\langle \zeta \rangle^{n+1} \rightarrow$  mise à jour de la grille verticale
  - $\langle U \rangle^{n+1} \rightarrow$  correction des vitesses baroclines au temps  $n + 1$
  - $\langle\langle U \rangle\rangle^{n+1/2} \rightarrow$  correction des vitesses baroclines au temps  $n + 1/2$
- Terme "lent" de forçage du barocline par le barotrope extrapolé

$$\mathcal{F}_{3D}^{n+1/2} = \left\{ \int \text{rhs}(u, v) dz - \text{rhs2D}(\bar{u}, \bar{v}) \right\}^{n+1/2} = \text{Extrap}(\mathcal{F}_{3D}^n, \mathcal{F}_{3D}^{n-1}, \mathcal{F}_{3D}^{n-2})$$

# Schéma en temps



---

## pre\_step3D\_thread()

---

- **rho\_eos** : calcul de la densité à l'instant  $n$

$$\rho'^n = \rho_{\text{EOS}}(T^n, S^n)$$

---

- **set\_HUV** : Calcul des flux volumétriques (i.e.  $U^n = \Delta y \Delta z^n u^n$ )

$$\text{HUon}_k^n = \text{Hz}_k^n \Delta y u_k^n$$

---

- **omega** : calcul du flux volumétrique vertical via l'équation de continuité

$$W_{k+1/2}^n = - \sum_{k'=1}^k (\text{div HUon})_{k'}^n + \frac{z_{k+1/2}^n - H}{\zeta^n - H} \sum_{k=1}^N (\text{div HUon})_k^n$$

- 
- **prsgrd** : Calcul du gradient de pression et ajout au membre de droite 3D ru

$$ru_k = \left. \frac{\partial P_k^n}{\partial x} \right|_z$$

---

- **rhs3d** : Calcul du membre de droite pour les équations du moment 3D à l'instant  $n$

→ Terme de Coriolis

$$ru^n = ru^n + \text{Coriolis}$$

→ Advection horizontale

$$ru^n = ru^n + \text{advection 2D}$$

→ Advection verticale

$$ru^n = ru^n + \text{advection verticale}$$

Calcul du terme de forçage pour les équations du moment dans le mode barotrope (ajout de la différence entre la friction de surface et de fond)

$$rufrc^n = \sum_{k=1}^N ru_k^n + \Delta x \Delta y (\tau_s - \tau_b)$$

- 
- `pre_step3d` : Prédicteur pour  $u, v, Hz, t$

$$Hz^{n+1/2} = (1/2 + \gamma) Hz^n + (1/2 - \gamma) Hz^{n-1} - (1 - \gamma)\Delta t \cdot [\text{div}_h \text{HUon}^n + \partial_z W^n]$$

Advection horizontale pour les traceurs

$$t^{n+1/2} = (1/2 + \gamma) Hz^n t^n + (1/2 - \gamma) Hz^{n-1} t^{n-1} - (1 - \gamma)\Delta t \cdot \text{div}_h (\text{HUon}^n t^n)$$

Advection verticale pour les traceurs

$$t^{n+1/2} = \frac{1}{Hz^{n+1/2}} \left[ t^{n+1/2} - (1 - \gamma)\Delta t \cdot \partial_z (W^n t^n) \right]$$

⇒ valeur définitive de  $t^{n+1/2}$

On avance  $u$  au temps  $n + 1/2$

$$u^{n+1/2} = \frac{1}{Hz^{n+1/2}} \left[ (1/2 + \gamma) Hz^n u^n + (1/2 - \gamma) Hz^{n-1} u^{n-1} - (1 - \gamma)\Delta t \cdot (ru^n) \right]$$

⇒ valeur temporaire de  $u^{n+1/2}$  avant correction par le 2D

→ Application des conditions aux bords pour  $t^{n+1/2}$  et  $u^{n+1/2}$   
(t3dbc,u3dbc,v3dbc)

→ Initialisation de la surface libre pour le mode barotrope

$$\zeta_0 \leftarrow \langle \zeta \rangle^n (= Zt\_avg1)$$

---

- **uv3dmix** : Calcul de la viscosité latérale pour  $H_z^n u^n$  au temps  $n$  et ajout de l'intégrale sur la verticale à rufrc<sup>n</sup>

---

## step2D\_thread()

---

### Boucle en temps pour le barotrope

→ Extrapolation de type AB3 au temps  $m + 1/2$

$$\begin{aligned} D^{m+1/2} &= (3/2 + \beta) \text{zeta}^m - (1/2 + 2\beta) \text{zeta}^{m-1} + \beta \text{zeta}^{m-2} + H & (= \text{Drhs}) \\ \bar{u}^{m+1/2} &= (3/2 + \beta) \text{ubar}^m - (1/2 + 2\beta) \text{ubar}^{m-1} + \beta \text{ubar}^{m-2} & (= \text{urhs}) \\ (\Delta y) \bar{U}^{m+1/2} &= \Delta y D^{m+1/2} \bar{u}^{m+1/2} & (\text{DUon} = \Delta y \text{Drh}) \\ \zeta^{m+1} &= \zeta^m + (\Delta\tau/\Delta y) \text{div}_h \text{DUon}^{m+1/2} & (= \text{zeta\_new}) \\ D^{m+1} &= \zeta^{m+1} + H & (= \text{Dnew}) \end{aligned}$$

→ Interpolation de type AM4 de la surface libre au temps  $m + 1/2$

$$\zeta^* = \alpha_0 \zeta^{m+1} + \alpha_1 \zeta^m + \alpha_2 \zeta^{m-1} + \alpha_3 \zeta^{m-2} \quad (= \text{zwrk} = \text{rzeta}; \text{rzeta2} = (\zeta^*)^2)$$

→ Conditions aux bords sur  $\zeta^{m+1}$  ([zetabc](#))

→ Filtrage temporel ( $\langle \zeta \rangle^{n+1} = \sum_m a_m \zeta^m$ ,  $\langle \langle \bar{U} \rangle \rangle^{n+1/2} = \sum_m b_m \bar{U}^{m+1/2}$ )

$$\begin{aligned} \langle \zeta \rangle^{n+1} &= \langle \zeta \rangle^{n+1} + a_m \zeta^{m+1} & (= \text{Zt\_avg1}) \\ \langle \langle \bar{U} \rangle \rangle^{n+1/2} &= \langle \langle \bar{U} \rangle \rangle^{n+1/2} + \Delta y b_m \bar{U}^{m+1/2} & (= \text{DU\_avg2}) \end{aligned}$$

→ Calcul du membre de droite  $\text{rubar}^{m+1/2}$  :

- Gradient de pression ( $\text{rubar}^{m+1/2} = gH\partial_x\zeta^* + (g/2)\partial_x\zeta^{*2}$ )
- Advection horizontale
- Terme de Coriolis
- Viscosité (optionnel)
- Friction de fond

→ Au 1er pas de temps 2D : extrapolation du forçage  $\text{rufrc}$  au temps  $n + 1/2$

$$\text{rufrc}^{n+1/2} = (3/2 + \delta)(\text{rufrc}^n - \text{rubar}^n) + \delta \text{rufrc}^{n-1} - (1/2 + 2\delta) \text{rufrc}^{n-2}$$

$$\text{rufrc}^n = \text{rufrc}^n - \text{rubar}^n \quad (= \text{rufrc\_bak}(n\text{stp}))$$

→ Finalisation du calcul du moment barotrope

$$\bar{U}^{m+1} = \bar{U}^m + \Delta\tau (\text{rubar}^{m+1/2} + \text{rufrc}^{n+1/2}) \quad (= \text{DUnew})$$

$$\bar{u}^{m+1} = \text{DUnew}/D^{m+1} \quad (= \text{ubar}(\text{knew}))$$

$$\langle \bar{U} \rangle^{n+1} = \langle \bar{U} \rangle^{n+1} + \Delta y a_m \bar{U}^{m+1} \quad (= \text{DU\_avg1})$$

→ Conditions aux bords sur  $\bar{u}^{m+1}$  ( $\text{u2dbc}$ ,  $\text{v2dbc}$ )

fin de la boucle barotrope

---

## step3D\_uv\_thread()

---

- **set\_depth** : mise à jour de la grille verticale (i.e.  $z_r^{n+1}$ ,  $z_w^{n+1}$ ,  $H_z^{n+1}$ ) via  $\langle \zeta \rangle^{n+1}$

- **set\_HUV2** : Correction de  $u^{n+1/2}$  pour assurer que

$$\sum_{k=1}^N H_z^{n+1} \Delta y u^{n+1/2} = DU\_avg2$$

⇒ valeur définitive de  $u^{n+1/2}$

$$HUon^{n+1/2} = H_z^{n+1} \Delta y u^{n+1/2}$$

- 
- **omega** : Calcul du flux volumétrique  $W^{n+1/2}$  via l'équation de continuité
  - **rho\_eos** : Mise à jour de la perturbation de densité  $\rho'^{n+1/2} = \rho_{EOS}(t^{n+1/2})$
  - **prsgrd** : Calcul du gradient de pression horizontal  $ru_k^{n+1/2} = \left. \frac{\partial P_k^{n+1/2}}{\partial x} \right|_z$

- `rhs3d` : Calcul du membre de droite  $ru^{n+1/2}$  pour l'équation du moment 3D
- 

- `step3d_uv1` : Correcteur pour  $u$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t (ru^{n+1/2})$$

---

- `step3d_uv2` :

- résolution du système tridiagonal pour la viscosité verticale implicite
- Correction de  $u^{n+1}$  pour assurer que

$$\sum_{k=1}^N \Delta y H_z^{n+1} u^{n+1} = DU\_avg1$$

- Conditions aux bords pour  $u^{n+1}$  (`u3dbc`, `v3dbc`)  
⇒ valeur définitive de  $u^{n+1}$
- Initialisation de  $\bar{u}$  pour l'intégration barotrope au pas de temps suivant

$$\bar{u}_0 \leftarrow \frac{DU\_avg1}{\sum_{k=1}^N \Delta y H_z^{n+1}}$$

- Calcul des flux volumétriques centrés en  $n + 1/2$

$$(\text{Hz } u)^* = \frac{3}{4} \text{HUon}^{n+1/2} + \frac{\text{Hz}^{n+1}}{8} (u^{n+1} + u^n)$$

- Correction de  $(\text{Hz } u)^*$  pour assurer que

$$\sum_{k=1}^N \Delta y (\text{Hz } u)^* = \text{DU}_{\text{avg}2}$$

- Mise à jour des flux volumétriques horizontaux en  $n + 1/2$

$$\text{HUon}^{n+1/2} = \Delta y (\text{Hz } u)^*$$

---

## step3D\_t\_thread()

---

- **omega** : Calcul du flux volumétrique vertical  $W^{n+1/2}$  à partir de l'équation de continuité
- **step3d\_t** : Correcteur pour  $t$

$$t^{n+1} = H_Z^n t^n - \Delta t \operatorname{div} \left( H U_{on}^{n+1/2} t^{n+1/2} \right)$$

$$t^{n+1} = t^{n+1} - \Delta t \operatorname{div} \left( W^{n+1/2} t^{n+1/2} \right)$$

- Résolution du système tridiagonal pour la diffusion verticale implicite
- Conditions aux bords pour  $t^{n+1}$  (**t3dbc**)

⇒ valeur définitive de  $t^{n+1}$